

КНИЖКА-ШПАРГАЛКА

МАТЕМАТИКА

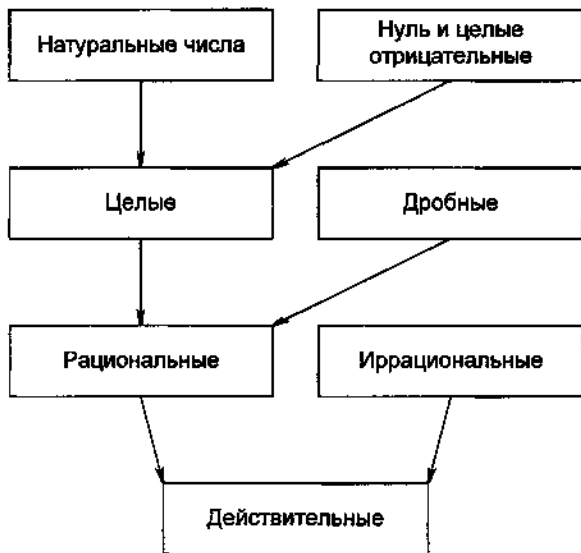
В
кармане



АЛГЕБРА

Числа

Развитие понятия числа от натурального до действительного



Натуральные числа

Признаки делимости

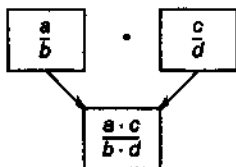
Делимость на:	Признак
2	Число оканчивается четной цифрой, т. е. 0, 2, 4, 6, 8
3	Сумма цифр записи числа делится на 3
4	Две последние цифры образуют число, делящееся на 4
5	Оканчивается на 0 или на 5
6	Делится одновременно и на 2, и на 3
8	Три последние цифры образуют число, делящееся на 8
9	Сумма цифр записи числа делится на 3
10	Оканчивается на 0

Рациональные числа

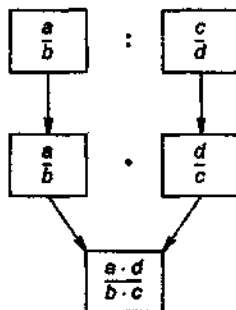
Сложение (вычитание) дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$

№	Отношение знаменателей	Сложение	Сумма
1	$n = q$	$\frac{m}{n} + \frac{p}{n}$	$\frac{m+p}{n}$
2	n и q — взаимно простые числа	$\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$	$\frac{mq+pn}{nq}$
3	n кратно q , т. е. $n = aq$	$\frac{m}{aq} + \frac{p}{q}$	$\frac{m+ap}{aq}$
4	$\text{НОД}(n;q) = d$, т. е. $n = a \cdot d$ и $q = b \cdot d$	$\frac{m}{ad} + \frac{p}{bd}$	$\frac{mb+ap}{abd}$

Умножение дробей



Деление дробей



Пропорции

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \begin{array}{l} a, d \text{ — крайние члены} \\ b, c \text{ — средние члены} \end{array}$$

Свойства пропорции:

1. $a \cdot d = b \cdot c$
2. $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right), \text{ т. е. } \frac{b}{a} = \frac{d}{c};$
3. $\frac{a}{b} = \cancel{\frac{c}{d}}, \text{ т. е. } \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

Модуль

Определение

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Свойства

1) $|a| = |-a|$

2) $|a| \geq a; |a| \geq -a$

3) $|a + b| \leq |a| + |b|$

4) $|a - b| \geq ||a| - |b||$

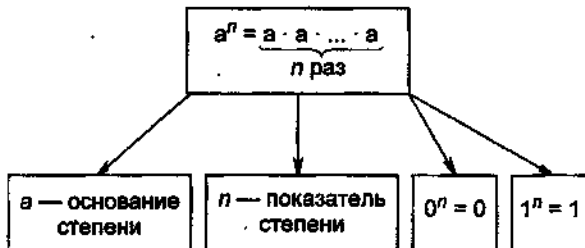
5) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

6) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$

Формулы сокращенного умножения многочленов

1	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
4	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6	$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
7	$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Степень с натуральным показателем



Свойства степени с натуральным показателем

№	Свойство	Пример
1	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^2 \cdot a^3 = a^5$
2	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$a^5 : a^3 = a^2$
3	$(a^m)^n = a^{mn}$	$(a^4)^3 = a^{12}$
4	$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$	$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$
5	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$	$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$

Корень n -й степени

Арифметический корень n -й степени

Корень n -й степени из a равен b :
 $b^n = a$

Арифметический корень
 n -й степени

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \begin{array}{l} 1) b \geq 0 \\ 2) b^n = a \end{array}$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Арифметический
квадратный корень

$$\sqrt{a} = b \quad \begin{array}{l} 1) b \geq 0 \\ 2) b^2 = a \end{array}$$

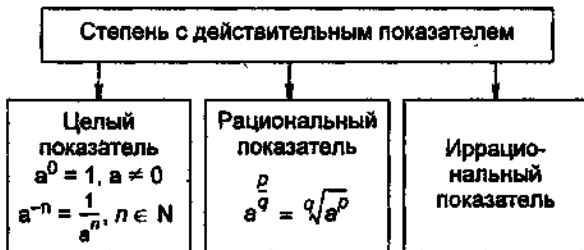
a —
подкоренное
выражение

n —
показатель
корня

Свойства арифметических корней

№	Свойство, $a > 0, b > 0$
1	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$
3	$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$
4	$\sqrt[n]{k\sqrt{a}} = \sqrt[n]{k} \sqrt[n]{a}$
5	$n \cdot m \sqrt[n]{a^{k \cdot m}} = \sqrt[n]{a^k}$

Степень с действительным показателем

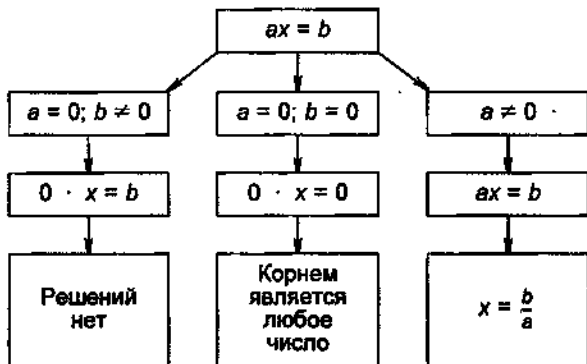


Уравнения с одной переменной

Степень	Название уравнения	Общий вид
1	Линейное	$ax = b$
2	Квадратное	$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$
3	Кубическое	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$

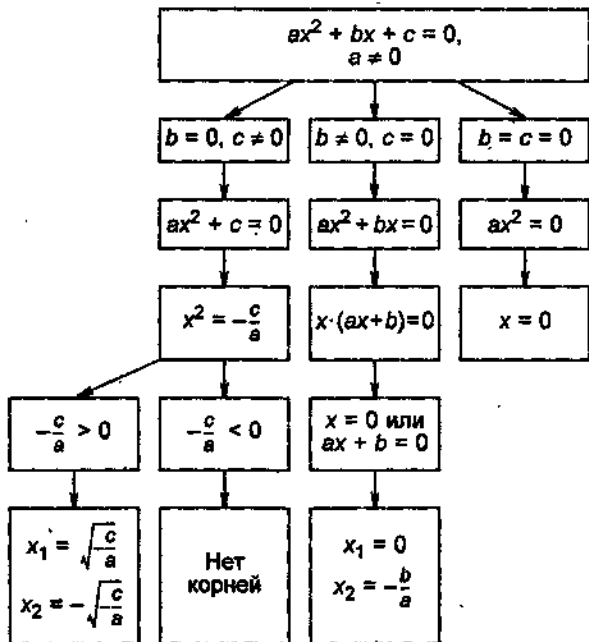
x — переменная; a, b, c, d — некоторые числа.

Решение линейного уравнения

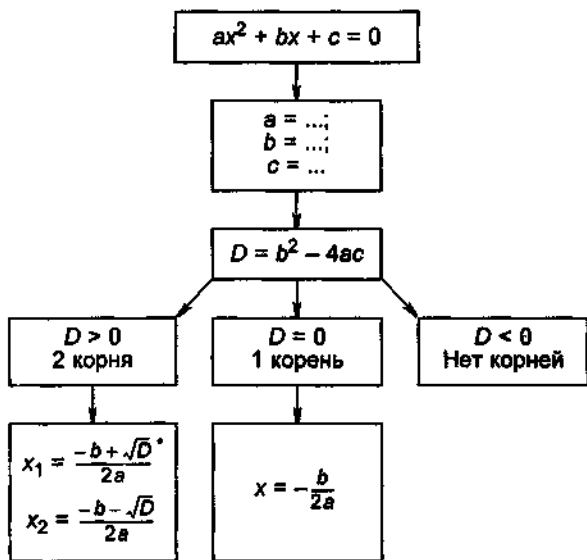


Решение квадратного уравнения $ax^2 + bx + c$

1. Решение неполного квадратного уравнения

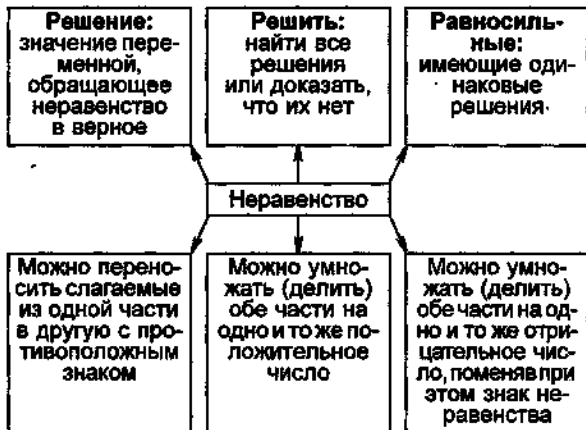


2. Решение квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ по формуле



* Запись корней x_1 и x_2 в случае, когда $D > 0$, объединяют и записывают так: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Неравенства

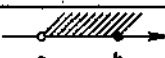
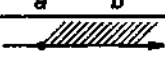
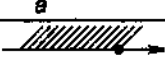


Название неравенства	Общий вид
Линейное	1) $ax > b$, 2) $ax \geq b$, 3) $ax < b$, 4) $ax \leq b$
Квадратичное	1) $ax^2 + bx + c > 0$, 2) $ax^2 + bx + c \geq 0$, 3) $ax^2 + bx + c < 0$, 4) $ax^2 + bx + c \leq 0$

Свойства числовых неравенств

№	Условие	Заключение
1	$a > b$	$b < a$
2	$a > b$ и $b > c$	$a > c$
3	$a > b$, c — любое число	$a + c > b + c$
4	$a > b$ и $c > 0$	$ac > bc$
5	$a > b$ и $c < 0$	$ac < bc$
6	$a > b$ и $c > d$	$a + c > b + d$
7	$a > 0, b > 0, c > 0, d > 0,$ $a > b$ и $c > d$	$ac > bd$
8	$a > b > 0, n$ — натуральное число	$a^n > b^n$
9	$a > 0, b > 0, a > b$	$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Числовые промежутки

Вид промежутка	Геометрическое изображение	Обозначение	Запись с помощью неравенств
Интервал		$(a; b)$	$a < x < b$
Отрезок		$[a; b]$	$a \leq x \leq b$
Полуинтервал		$(a; b]$	$a < x \leq b$
Полуинтервал		$[a; b)$	$a \leq x < b$
Луч		$[a; +\infty)$	$x \geq a$
Луч		$(-\infty; b]$	$x \leq b$
Открытый луч		$(a; +\infty)$	$x > a$
Открытый луч		$(-\infty; b)$	$x < b$

Решение линейного неравенства

Вид неравенства	a	Решение	Ответ
$ax + b > 0$	$a > 0$	$x > -\frac{b}{a}$	$\left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$
$ax + b > 0$	$a < 0$	$x < -\frac{b}{a}$	$\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$
$ax + b \geq 0$	$a > 0$	$x \geq -\frac{b}{a}$	$\left[-\frac{b}{a}; \infty\right)$
$ax + b \geq 0$	$a < 0$	$x \leq -\frac{b}{a}$	$\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right]$
$ax + b < 0$	$a > 0$	$x < -\frac{b}{a}$	$\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$
$ax + b < 0$	$a < 0$	$x > -\frac{b}{a}$	$\left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$
$ax + b \leq 0$	$a > 0$	$x \leq -\frac{b}{a}$	$\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right]$
$ax + b \leq 0$	$a < 0$	$x \geq -\frac{b}{a}$	$\left[-\frac{b}{a}; \infty\right)$

Решение неравенств методом интервалов

$$\begin{matrix} f(x) > 0; f(x) \geq 0 \\ f(x) < 0; f(x) \leq 0 \end{matrix}$$

Пример

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$$

Находим нули
 функции, т. е. точки,
 в которых
 $f(x) = 0$; $x = a$; $x = b$

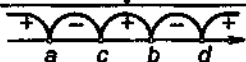
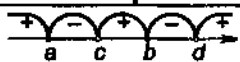
Находим точки,
 в которых функция $f(x)$
 не определена;
 $x \neq c$; $x \neq d$

Находим промежутки знакопостоянства, например



$$f(x) \geq 0; f(x) \leq 0$$

$$f(x) > 0; f(x) < 0$$



$$f(x) \geq 0$$

$$f(x) \leq 0$$

$$f(x) > 0$$

$$f(x) < 0$$

Ответ:

$$(-\infty; a] \cup [c; b] \cup (d; \infty)$$

Ответ:

$$[a; c) \cup [b; d)$$

Ответ:

$$(-\infty; a) \cup (c; b) \cup (d; \infty)$$

Ответ:

$$(a; c) \cup (b; d)$$

Решение системы линейных неравенств с одной переменной вида

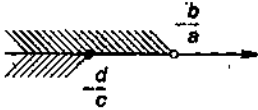
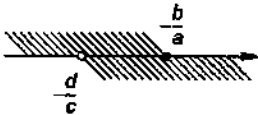
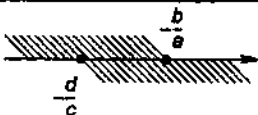
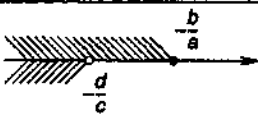
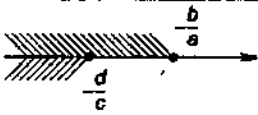
$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}, \text{ где } -\frac{b}{a} > -\frac{d}{c} \quad (a > 0; c > 0)$$

Система неравенств	Изображения на координатной прямой	Решение
$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}$		$\left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$
$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d \geq 0 \end{cases}$		$\left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$
$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d < 0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d \leq 0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}$		$\left[-\frac{b}{a}; \infty\right)$

См. продолжение

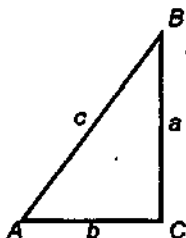
Система неравенств	Изображение на координатной прямой	Решение
$\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ cx + d \geq 0 \end{cases}$		$\left[-\frac{b}{a}; \infty\right)$
$\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ cx + d < 0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d \leq 0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax + b < 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}$		$\left(-\frac{d}{c}; -\frac{b}{a}\right)$
$\begin{cases} ax + b < 0 \\ cx + d \geq 0 \end{cases}$		$\left[-\frac{d}{c}; -\frac{b}{a}\right)$
$\begin{cases} ax + b < 0 \\ cx + d < 0 \end{cases}$		$\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$

См. продолжение

Система неравенств	Изображение на координатной прямой	Решение
$\begin{cases} ax + b < 0 \\ cx + d \leq 0 \end{cases}$		$\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right]$
$\begin{cases} ax + b \leq 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}$		$\left(-\frac{d}{c}; -\frac{b}{a}\right]$
$\begin{cases} ax + b \leq 0 \\ cx + d \geq 0 \end{cases}$		$\left[-\frac{d}{c}; -\frac{b}{a}\right]$
$\begin{cases} ax + b \leq 0 \\ cx + d < 0 \end{cases}$		$\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$
$\begin{cases} ax + b < 0 \\ cx + d \leq 0 \end{cases}$		$\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right]$

Характеристики	Последовательность	
	Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Определение	Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d (разность прогрессии) $a_{n+1} = a_n + d$	Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q (знаменатель прогрессии) $b_{n+1} = b_n \cdot q$
Формула n -го члена	$a_n = a_1 + d(n-1)$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Формула суммы n первых членов (через первый член и n -й)	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}$
Формула суммы n первых членов (через первый член и разность или знаменатель)	$S_n = \frac{2a + d(n-1)}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$
Характеристическое свойство	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$
Сумма бесконечной геометрической прогрессии	—	$S = \frac{b_1}{1-q}, q < 1$

Тригонометрические функции острого угла



Функция	Угол	
	A	B
sin (синус)	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$
cos (косинус)	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{c}$
tg (тангенс)	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
ctg (котангенс)	$\frac{b}{a}$	$\frac{a}{b}$
sec (секанс)	$\frac{c}{b}$	$\frac{c}{a}$
cosec (косеканс)	$\frac{c}{a}$	$\frac{c}{b}$

Сравнительная таблица градусной и радианной мер некоторых углов

Углы в градусах	Углы в радианах	Углы в градусах	Углы в радианах
0°	0	180°	π
30°	$\frac{\pi}{6}$	210°	$\frac{7\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	225°	$\frac{5\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	240°	$\frac{4\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	270°	$\frac{3\pi}{2}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$	300°	$\frac{5\pi}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	315°	$\frac{7\pi}{4}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	330°	$\frac{11\pi}{6}$
		360°	2π

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Аргумент Функция α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-
$\sec$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	-	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1
cosec	-	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	-

См. продолжение

Аргумент α Функция	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin \alpha$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-
$\sec$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	-	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
cosec	-	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	-

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1$$

$$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Формулы сложения и вычитания

Функция	Аргумент	
	$\alpha + \beta$	$\alpha - \beta$
sin	$\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$	$\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$
cos	$\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$	$\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$
tg	$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$
ctg	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$
sec	$\frac{1}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}$	$\frac{1}{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}$
cosec	$\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}$	$\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}$

**Формулы половинных, двойных
и тройных углов (также $\sin 4\alpha$; $\cos 4\alpha$)**

	$\frac{\alpha}{2}$	2α	3α	4α
$\sin$	$\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$	$2 \sin \alpha \times$ $\times \cos \alpha$	$3 \sin \alpha -$ $4 \sin^3 \alpha$	$4 \cos^3 \alpha \times$ $\times \sin \alpha -$ $- 4 \cos \alpha \times$ $\times \sin^3 \alpha$
$\cos$	$\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$	$\cos^2 \alpha -$ $- \sin^2 \alpha$	$4 \cos^3 \alpha -$ $- 3 \cos \alpha$	$\cos^4 \alpha -$ $- 6 \cos^2 \alpha \times$ $\times \sin^2 \alpha +$ $+ \sin^4 \alpha$
tg	$\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$	$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$	—
ctg	$\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$	$\frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$	—

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

$\sin \alpha + \sin \beta$	$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\sin \alpha - \sin \beta$	$2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha + \cos \beta$	$2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha - \cos \beta$	$-2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha + \sin \alpha$	$\sqrt{2} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$
$\cos \alpha - \sin \alpha$	$\sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$
$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta$	$\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$
$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta$	$\frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$
$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta$	$\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$

См. продолжение

$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta$	$-\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$
$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$	$2 \operatorname{cosec} 2\alpha$
$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$	$-2 \operatorname{ctg} 2\alpha$

Обратные тригонометрические функции

Функция	Обратная функция	α	$\sin \alpha$
$\sin$	$\arcsin a = \alpha$	$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\sin \alpha = a$
$\cos$	$\arccos a = \alpha$	$\alpha \in [0; \pi]$	$\cos \alpha = a$
tg	$\operatorname{arctg} a = \alpha$	$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$\operatorname{tg} \alpha = a$
ctg	$\operatorname{arcctg} a = \alpha$	$\alpha \in (0; \pi)$	$\operatorname{ctg} \alpha = a$

Решение тригонометрических уравнений

Уравнение	a	Формулы решений	Частные случаи
$\sin x = a$	$ a > 1$	Нет решений	—
	$ a \leq 1$	$x = (-1)^k x + \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$\sin x = 0; x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$
			$\sin x = 1; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
			$\sin x = -1; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	$ a > 1$	Нет решений	—
	$ a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\cos x = 0; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
			$\cos x = 1; x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
			$\cos x = -1; x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	a — любое число	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	—
$\operatorname{ctg} x = a$	a — любое число	$x = \operatorname{arccotg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	—

Решение простейших тригонометрических уравнений вида $\sin x = a$; $\cos x = a$

a	$\sin x = a$	$\cos x = a$
0	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$
1	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = 2\pi n$
-1	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = \pi + 2\pi n$
$\frac{1}{2}$	$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$
$-\frac{1}{2}$	$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$

$$k, n \in \mathbb{Z}$$

Решение простейших тригонометрических уравнений вида $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{ctg} x = a$

a	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$
0	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$
1	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$
-1	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$
$\sqrt{3}$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{6} + \pi n$
$-\sqrt{3}$	$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \frac{5\pi}{6} + \pi n$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi n$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \frac{2\pi}{3} + \pi n$

$$k, n \in \mathbb{Z}$$

Связь показательной и логарифмической функций

Функция	x	y
$y = a^x$	Показатель степени	Степень
$y = \log_a x$ ($x = a^y$)	Степень	Показатель степени

Правила логарифмирования и потенцирования

№	Правила логарифмирования	Правила потенцирования
1	$\log_a(N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$	$\log_a N_1 + \log_a N_2 = \log_a(N_1 \cdot N_2)$
2	$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$	$\log_a N_1 - \log_a N_2 = \log_a \frac{N_1}{N_2}$
3	$\log_a N^k = k \cdot \log_a N$	$k \cdot \log_a N = \log_a N^k$
4	$\log_a \sqrt[k]{N} = \frac{1}{k} \cdot \log_a N$	$\frac{1}{k} \cdot \log_a N = \log_a \sqrt[k]{N}$

Производная $f'(x)$

Определение.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \text{ где } \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Геометрический смысл.

$y = kx + b$ — касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_0 . $f'(x_0) = k$

Физический смысл.

1) $S'(t) = v(t)$; $v'(t) = a(t)$. S — расстояние, v — скорость, a — ускорение, t — время. 2) Мощность есть производная работы по времени

Правила вычисления производных.

$$1) (u + v)' = u' + v'. \quad 2) (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'. \quad 3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \text{ где } v \neq 0$$

Производная сложной функции.

$$h(x) = g(f(x)) \quad h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Возрастание и убывание функции.

Если $f'(x) > 0$ на J , то $f(x)$ возрастает на J .

Если $f'(x) < 0$ на J , то $f(x)$ убывает на J .

Точки максимума и минимума.

Если x_0 — точки экстремума, то $f'(x_0) = 0$

1) Если в точке x_0 $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», то x_0 — точка максимума. 2) Если в точке x_0 $f'(x)$ меняет знак с «-» на «+», то x_0 — точка минимума

Таблица производных

№	$f(x)$	$f'(x)$
1	C — постоянная	0
2	$kx + b$	k
3	x^r	$r \cdot x^{r-1}$
4	x^k	kx^{k-1}
5	a^x	$a^x \cdot \ln a$
6	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
7	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

См. продолжение

№	$f(x)$	$f'(x)$
8	$\sin x$	$\cos x$
9	$\cos x$	$-\sin x$
10	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
11	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
12	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
15	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Определение. $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на промежутке J , если $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in J$.

Основное свойство. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на промежутке J , то общий вид всех первообразных для $f(x)$: $F(x) + C$, где C — const.

Графики функций $F(x) + C$ получаются из графика $y = F(x)$ сдвигом вдоль оси Oy .

Первообразная

1. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $H(x)$ — первообразная для $h(x)$, то $F(x) + H(x)$ — первообразная для $f(x) + h(x)$.
2. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и k — постоянная, то $kF(x)$ — первообразная для $k \cdot f(x)$.
3. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, k и b — постоянные, где $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ — первообразная для $f(kx + b)$.

Формула Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

1. Интеграл суммы равен сумме интегралов

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

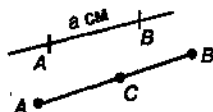
$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Таблица первообразных

№	Функция	Первообразная
1	$f(x) = k$	$F(x) = kx$
2	$f(x) = x^r$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x $
4	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
5	$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$
6	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
7	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
8	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x$
9	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \operatorname{tg} x$
10	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x$
11	$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \operatorname{arctg} x$

ГЕОМЕТРИЯ

Отрезок

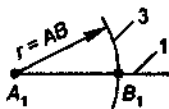


$$AB = a \text{ см}$$
$$AC + CB = AB$$

Дано: отрезок AB

Построить: A_1B_1 , $A_1B_1 = AB$

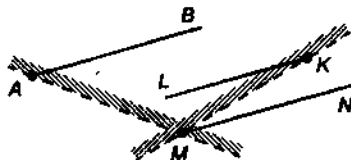
Построение



Луч

Сонаправленные лучи — AB и MN

Противоположно направленные лучи — MN и KL



Угол



Развернутый



Прямой



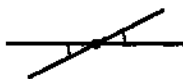
Острый



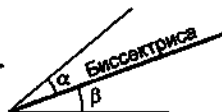
Тупой



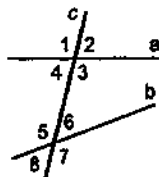
Смежные



Вертикальные



$$\angle \alpha = \angle \beta$$



С — секущая

Внутренние накрест лежащие углы — 3 и 5, 4 и 6

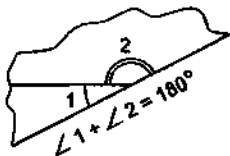
Односторонние (прилежащие) углы — 4 и 5, 3 и 6

Соответственные углы — 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7

Внешние накрест лежащие углы — 1 и 7, 2 и 8

Свойства смежных и вертикальных углов

Теорема о смежных углах



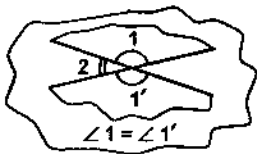
Доказательство:

Так как $\angle 1 + \angle 2$ — развернутый угол, то $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

Теорема о вертикальных углах

Доказательство:

$$\left. \begin{array}{l} \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ \\ \angle 1' + \angle 2 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle 1 = \angle 1'$$

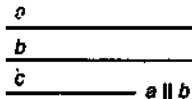


Параллельные прямые

Определение

a и b не пересекаются

$a \parallel b, b \parallel c \rightarrow a \parallel c$



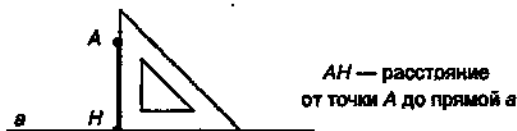
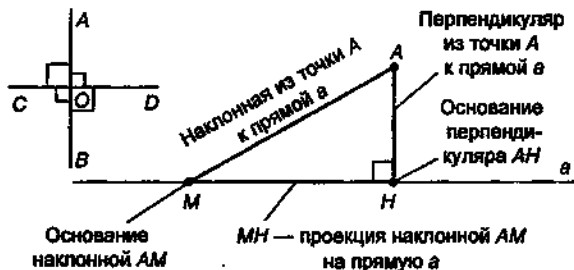
Признаки параллельности прямых (прямые и обратные теоремы)

№ п/п	Признак (прямая теорема)	Рисунок	Свойство (обратная теорема)
1	Если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$ Следствие: Если $a \perp c$ и $b \perp c$, то $a \parallel b$		Если $a \parallel b$, то $\angle 1 = \angle 2$ Следствие: Если $a \parallel b$ и $c \perp a$, то $c \perp b$
2	Если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$		Если $a \parallel b$, то $\angle 1 = \angle 2$
3	Если $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, то $a \parallel b$		Если $a \parallel b$, то $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

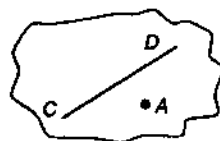
Перпендикулярные прямые

Определения

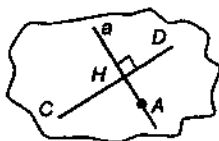
$AB \perp CD$: $\angle AOD = \angle AOC = \angle COB = \angle DOB = 90^\circ$



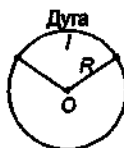
Свойство



Существует единственная прямая a



Окружность, круг



Окружность

$$C = 2\pi R = \pi d,$$

где $\pi \approx 3,14$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

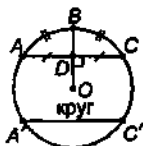
Круговой сектор



α — радианная
мера дуги

α — градусная
мера дуги

$$l = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} = R\alpha$$

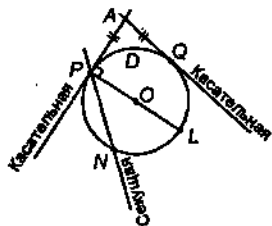


$$AC = A'C'$$

$$\cup AC = \cup A'C'$$

$$AD = DC$$

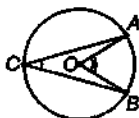
$$\cup AB = \cup BC$$



$$AP = AQ$$

$\angle PAQ$ — описанный

$$\angle PAQ = \frac{1}{2} (\cup PLQ - \cup PDQ)$$



$\angle AOB$ — центральный

$\angle ACB$ — вписанный

$$\angle AOB = \alpha^\circ; \cup AB = \alpha^\circ$$

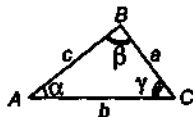
$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

$$1^\circ = \frac{1}{360} \text{ часть всей}$$

окружности

Треугольник

Общие сведения

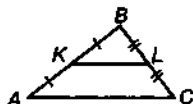


Три стороны, три угла —
элементы треугольника

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

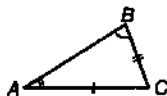


$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$$

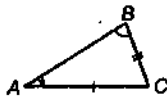


$$KL \parallel AC, KL = \frac{1}{2} AC$$

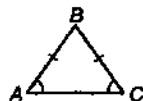
Теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольников



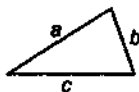
Если $AC > BC$, то $\angle B > \angle A$



Если $\angle B > \angle A$, то $AC > BC$



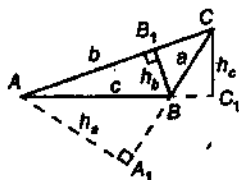
Если $\angle A = \angle C$,
то $BC = BA$



$$\begin{aligned} a &< b + c \\ b &< a + c \\ c &< a + b \end{aligned}$$

Высота, медиана, биссектриса

Высота h :

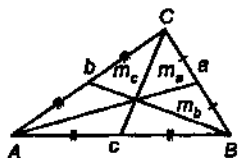


$$h_a = \frac{2S_{\text{треуг}}}{a}, \text{ где } S_{\text{треуг}} —$$

площадь $\triangle ABC$

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \\ = bc : ac : ab$$

Медиана m :



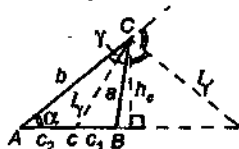
$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Биссектриса l :



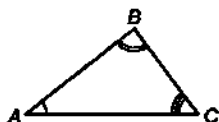
$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{b}{a}$$

$$l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}$$

$$l_b = \frac{2}{|b-c|} \times \sqrt{bc(p-c)(p-b)},$$

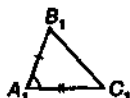
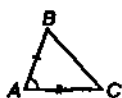
где $p = \frac{a+b+c}{2}$, $\angle(h_c; l_b) = \frac{\beta - \alpha}{2}$, $\angle(h_c; l_a) = 90^\circ - \frac{\beta - \alpha}{2}$

Равенство треугольников



$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

Первый признак
равенства треугольников



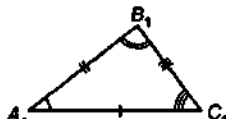
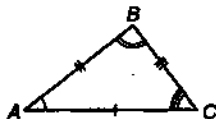
$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

Второй признак
равенства треугольников



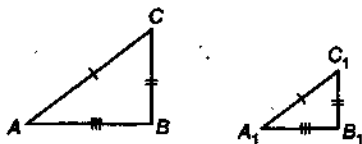
$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

Третий признак равенства треугольников



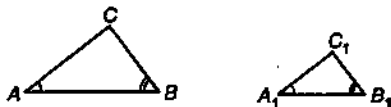
$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

Подобие треугольников



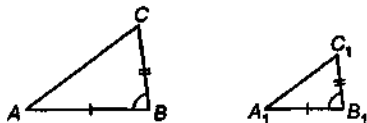
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$



$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$$

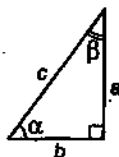
$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}, \angle B = \angle B_1$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

Основные тригонометрические соотношения



Синус:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{противолежающий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

Косинус:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

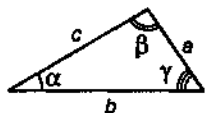
$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

Теорема косинусов



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности

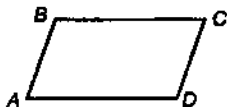
Теорема тангенсов

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}};$$

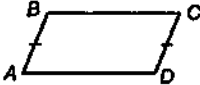
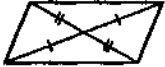
$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2}};$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}};$$

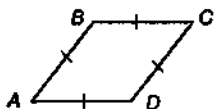
Параллелограмм



$$AB \parallel CD, BC \parallel AD.$$

Свойства параллелограмма	Признаки параллелограмма
1. В параллелограмме противоположные углы равны 	1. Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник параллелограмм  Если $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, то $ABCD$ — параллелограмм
2. В параллелограмме противоположные стороны равны 	2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм
3. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам 	3. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм

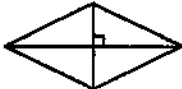
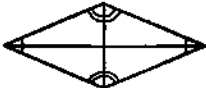
Ромб



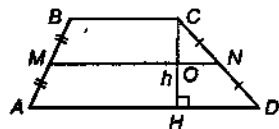
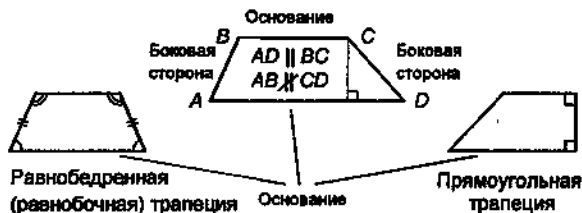
$ABCD$ — ромб

$AB \parallel CD, BC \parallel AD$

$AB = CD = BC = AD$

Свойства ромба	Признаки ромба
1. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом	1. Если диагонали параллелограмма пересекаются под прямым углом, то этот параллелограмм — ромб
	
2. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов	2. Если диагонали параллелограмма являются биссектрисами его углов, то этот параллелограмм — ромб
	
Все свойства параллелограмма верны для ромба	

Трапеция



Средняя линия трапеции

Описанная около окружности трапеция



Окружность, описанная вокруг трапеции



$$AC \cdot BD = AC \cdot CD + AD \cdot CB$$

$$\angle A + \angle C = 180^\circ; \angle B + \angle D = 180^\circ$$

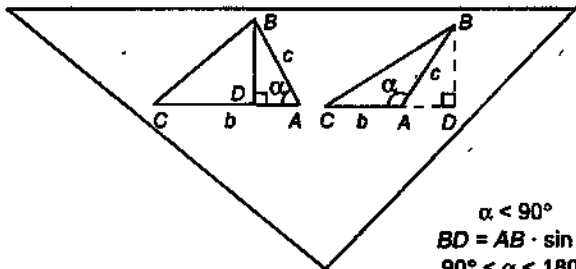
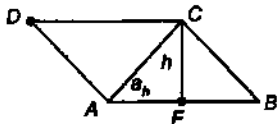
Площадь треугольника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a_h \cdot h$$

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC}$$

$$S_{ABCD} = a_h \cdot h$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a_h \cdot h$$



$$\alpha < 90^\circ$$

$$BD = AB \cdot \sin$$

$$90^\circ < \alpha < 180$$

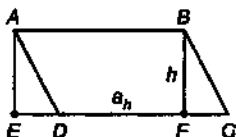
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} bc \sin \angle b, c$$

$$BD = AB \cdot \sin (180^\circ - \alpha) = AB \cdot \sin \alpha$$

$$h = c \cdot \sin \angle b, c$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} b_h \cdot h \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{1}{2} bc \sin \angle b, c$$

Площадь параллелограмма



$$S = a_h \cdot h$$

Если $ABCD$ — прямоугольник, то $S_{ABCD} = a_h \cdot h$

Если $ABCD$ — не прямоугольник, то пусть $\angle DAB < 90^\circ$

$$S_{ABCE} = S_{\triangle AED} + S_{ABCD}$$

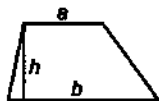
$$S_{ABCE} = S_{ABFE} + S_{\triangle BFC}$$

$$S_{\triangle AED} = S_{\triangle BFC}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABFE}$$

$$S_{ABCD} = a_h \cdot h$$

Площадь трапеции



Теорема: $S_{\text{трап}} = \frac{a+b}{2} \cdot h$

Доказательство:

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC}, \text{ поскольку}$$

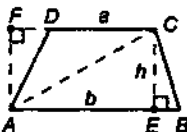
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CE$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} DC \cdot AF,$$

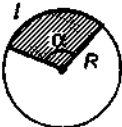
$$\text{то } S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB \cdot CE + DC \cdot AF) =$$

$$= \frac{1}{2} h(AB + DC)$$

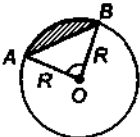
$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} h$$



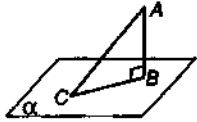
Площади круга, сектора, сегмента

Формула, рисунок	Примеры
 $S_{\text{кр}} = \pi R^2$ $S_{\text{кр}} = \frac{\pi d^2}{4}$	$R = 2 \text{ см}$ $S = 3,14 \cdot 2^2 = 12,56 \text{ (см}^2\text{)}$ $d = 4 \text{ см}$ $S = 3,14 \cdot \frac{4^2}{4} = 12,56 \text{ (см}^2\text{)}$
 $S_{\text{сект}} = \frac{Rl}{2} =$ $= R^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$	$R = 2 \text{ см}; l = 3 \text{ см};$ $S = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \text{ (см}^2\text{)}$ $R = 4 \text{ см}; \alpha = 2 \text{ рад};$ $S = \frac{4^2 \cdot 2}{2} = 16 \text{ (см}^2\text{)}$ $R = 3 \text{ см}; \alpha = 120^\circ;$ $S = \frac{3,14 \cdot 3^2 \cdot 120}{360} = 9,42 \text{ (см}^2\text{)}$

См. продолжение

Формула, рисунок	Примеры
 $S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} - S_{\Delta AOB}$ $S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin \alpha)$	$R = 2 \text{ см}; \angle AOB = 60^\circ$ $S_{\text{сект}} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 60}{360} = \frac{2\pi}{3} \text{ (см}^2\text{)}$ $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin 60^\circ = \sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}$ $S_{\text{сегм}} = \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right) \text{ см}^2$ $R = 2 \text{ см}; \angle AOB = \frac{\pi}{3}$ $S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \left(\frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \right) =$ $= 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right) \text{ см}^2$

Наклонная в пространстве

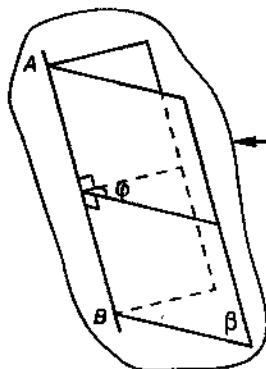
	$AB \perp \alpha; AC —$ наклонная; $C —$ основание наклонной; $CB —$ проекция наклонной	$AC > AB$
--	--	-----------

См. продолжение

	$AB \perp \alpha$; AC — наклонная; C — основание наклонной; BC — проекция; $a \subset \alpha$	Теорема о трех перпендикулярах: «Если $a \perp BC$, следовательно, $a \perp AC$. Если $a \perp AC$, следовательно, $a \perp BC$»
	$AB \perp \alpha$; AC_1, AC_2 — наклонные; BC_1, BC_2 — проекции наклонных.	Если $AC_1 = AC_2$, то $BC_1 = BC_2$. Если $BC_1 = BC_2$, то $AC_1 = AC_2$
	$AB \perp \alpha$; AC_1, AC_2 — наклонные; BC_1, BC_2 — проекции наклонных	Если $AC_1 > AC_2$, то $BC_1 > BC_2$. Если $BC_1 > BC_2$, то $AC_1 > AC_2$

Двугранный угол

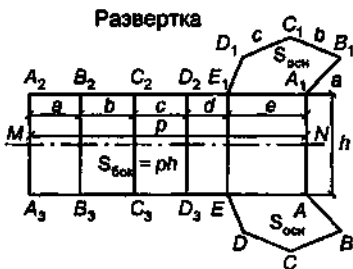
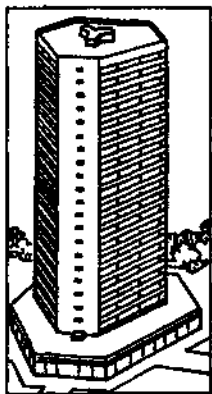
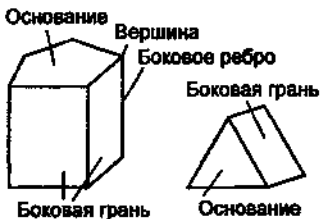
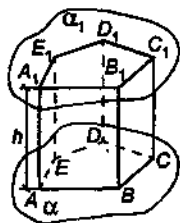
Двугранный угол с ребром AB и гранями α и β ; плоскость φ пересекает ребро AB под прямым углом, а плоскости α и β вырезают на ней линейный угол φ данного двугранного угла



$$\angle(\alpha, \beta) = \angle \varphi$$
$$0^\circ < \angle \varphi < 180^\circ$$

Фигура, образованная полуплоскостями, не принадлежащими одной плоскости, с общей ограничивающей прямой

Прямая призма

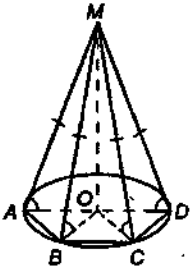
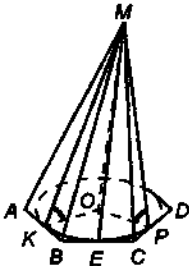


Площадь поверхности

$$S_{\text{пр}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$

$$\text{Объем } V_{\text{пр}} = Sh$$

Пирамиды

Изображение	Основные соотношения
	Если $MA = MB = MC = \dots$, то $MO \perp ABC$. Если $\angle MAO = \angle MBO = \angle MDO = \angle MCO = \dots$, то O — центр описанной окружности
	Если $\angle MKO = \angle MEO = \angle MPO = \dots$, то O — центр вписанной окружности

Усеченная пирамида

Построение

→ $OABCD$ — пирамида $(ABCD) \parallel (A_1B_1C_1D_1)$:

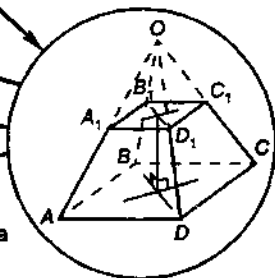
→ $OA_1B_1C_1D_1$ — пирамида

$ABCD A_1B_1C_1D_1$ — усеченная пирамида

$$H_o^k(ABCD) = A_1B_1C_1D_1$$

Боковые грани —
трапеции

Если $OABCD$ — правильная
пирамида, то $ABCD A_1B_1C_1D_1$ —
правильная усеченная пирамида



$$S_{\text{полн пов}} : S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2} + S_{\text{бок}}$$

$$S_{\text{бок пов}} = \frac{1}{2} (P + p)h, \text{ где } P, p — \text{периметры оснований}$$

$$V = \frac{1}{3} h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

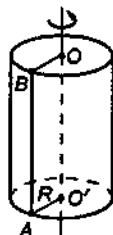
$$S_1 = S_{ABCD}, S_2 = S_{A_1B_1C_1D_1}$$

В правильной усеченной пирамиде грани — равные
равнобедренные трапеции

Высота трапеции боковой грани — апофема
правильной усеченной пирамиды (h)

Цилиндр

Цилиндр, получаемый вращением прямоугольника $OO'AB$ вокруг прямой, содержащей сторону OO' , перпендикулярные стороны $O'A$ и OB описывают основания цилиндра, а отрезок AB ,



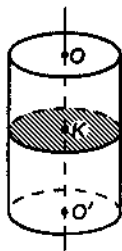
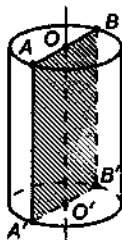
параллельный OO' , — боковую поверхность его. R — радиус основания цилиндра, h — его высота, равная образующей

Прямоугольник $AA'B'B$ — осевое сечение цилиндра с осью OO'

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh$$

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2$$

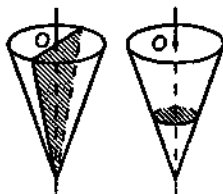
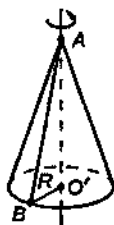
$$V = \pi R^2 h$$



Круг K — поперечное сечение цилиндра с осью OO'

Конус

Конус, получаемый вращением прямоугольного треугольника AOB вокруг прямой, содержащей катет AO , другой катет OB описывает основание конуса, а гипотенуза AB — его боковую поверхность, R — радиус основания конуса, h — высота его, l — образующая



Осевое сечение конуса с осью O — равнобедренный треугольник

$$S_{\text{бок}} = \pi R l$$

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2$$

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$



Усеченный конус, общий вид

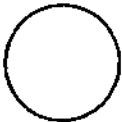
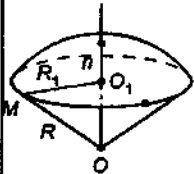
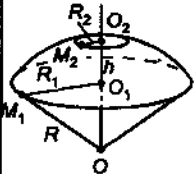
Усеченный конус, R_1 и R_2 — радиусы оснований, h — высота, l — отрезок образующей, O — ось

$$S_{\text{бок}} = \pi l (R_1 + R_2)$$

$$V = \frac{\pi h}{3} (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$$

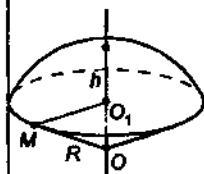


Объемы и площади поверхностей шара и его частей

	$S_{\text{пов шара}} = 4\pi R^2$ $V_{\text{шара}} = \frac{4\pi R^3}{3}$
	$S_{\text{бок}} = 2\pi R h = \pi D h = \pi(R_1^2 + h^2)$ $S = \pi(2Rh + R_1^2) = \pi(h^2 + 2R_1^2)$ $R_1 = \sqrt{h(2R - h)}$ $V_{\text{сегм}} = \pi \left(R - \frac{h}{3} \right) h^2 =$ $= \frac{1}{6} \pi h (3R^2 + h^2) = \frac{1}{6} \pi h^2 (3D + 2h)$
	h_1 и h_2 — высоты удаленных сегментов так, что $2R - h_1 - h_2 = h$

См. продолжение

Продолжение



$$V_{\text{сфера}} = \frac{4}{3} \pi R^3 - \pi R(h_1^2 +$$

$$+ h_2^2) - \frac{\pi}{3} (h_1^3 + h_2^3)$$

$$V_{\text{сфера}} = \frac{1}{6} \pi h (3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2)$$

$$S_{\text{поверх}} = 2\pi R h = \pi D h$$

$$V_{\text{сфера}} = \frac{2\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi}{6} D^2 h$$

$$S_{\text{поверх. сфера}} = \pi R (2h + O_1 M)$$

Содержание

Алгебра	1
Геометрия	37

В помощь учебному процессу

Справочные материалы

МАТЕМАТИКА В КАРМАНЕ

Ответственный редактор *О. В. Стукалова*

Макет *И. А. Илгерин*

Корректор *Л. К. Корнилова*

ISBN 5-17-009323-X (ООО «Издательство АСТ»)

ISBN 5-8195-0176-1 (ООО «АСТОЛ»)

Подписано в печать 09.12.2003. Формат 84х108 1/16. Гарнитура
Гольцинка. Дейт. Усл. печ. л. 1,68. Тираж 15000 экз. Заказ № 20.
Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2,
953005 – литература учебная.

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№77.99.02.953 Д 908286 12.02 от 27.12.02

ООО «АСТОЛ»

129085, Москва, пр. Олимпийского, д. 3а, стр. 3

ООО «Издательство АСТ»

667000, Республика Тыва, г. Кызыл

ул. Кочетова, д. 28

www.ast.ru

E-mail: ast@ast.ru

Denis

e-mail: demik@bk.ru

Незаменимая помощь школьникам!

«МАТЕМАТИКА В КАРМАНЕ»

**Весь школьный курс математики
наглядно представлен в виде
простых и четких таблиц и схем,
которые облегчают нахождение
и запоминание материала.**

**Эта книжка станет незаменимым
помощником на уроках,
а также при подготовке
к зачетам и экзаменам.**

ISBN 5-17-009325-X



9785170093250